

Analyse des documents graphiques :
une approche par reconstruction d'objets

15 juin 2007

Annexe A : Les graphes

Cette Annexe présente différentes définitions sur les aspects modélisation¹ des graphes. Il existe de nombreux ouvrages de synthèse traitants les graphes [Gondran 95], [Diestel 00], [Gross 03], [Lacomme 03], ... Nos définitions ont été principalement inspirées de celles présentées dans les ouvrages de [Gondran 95] et [Lacomme 03].

Définition 1 Graphe : Soit un graphe $G=(V,E)$ ²

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble de noeuds

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est un ensemble de couples de noeuds $e_j=(x_j,y_j)$ appelés arcs² avec $(x_j,y_j) \in V$.

Définition 2 Incidence et extrémités :

Un arc $u = (x,y)$ est incident aux noeuds x et y .

Les noeuds x et y sont extrémités de l'arc $u = (x,y)$.

Définition 3 Adjacence et boucle :

Deux noeuds x et y sont adjacents si il existe un arc $u=(x,y)$ dans E .

Deux arcs u et v sont adjacents si ils ont une extrémité en commun.

Un arc $u = (x,x)$ adjacent à lui même est appelé boucle.

Définition 4 Degré :

Le degré d'un noeud x est le nombre d'arcs incidents à x , il est noté $d(x)$.

Un noeud x est dit isolé si $d(x)=0$.

Définition 5 Ordre et p-graphe :

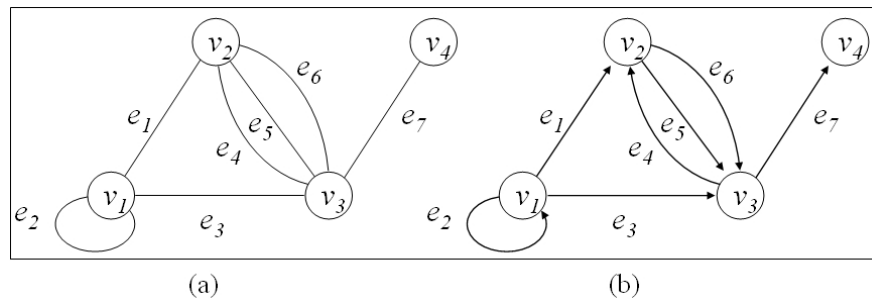
Le nombre de noeuds n d'un Graphe correspond à son ordre.

Un p -graphe contient p arcs au maximum pouvant joindre deux noeuds.

¹Nous reportons le lecteur à [Lacomme 03] sur les aspects parcours et appariement.

²vertex (V) and edge (E)

La figure (a) suivante illustre ces premières définitions avec la présentation d'un graphe. Ce graphe $G=(V,E)$ est tel que $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, et $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ avec : $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_1,v_1)$, $e_3=(v_1,v_3)$, $e_4=(v_2,v_3)$, $e_5=(v_2,v_3)$, $e_6=(v_2,v_3)$, $e_7=(v_3,v_4)$. Dans ce graphe les ensembles de noeuds $\{v_1,v_2,v_3\}$ et $\{v_3,v_4\}$ sont respectivement adjacents. Concernant les arcs se sont les ensembles $\{e_1,e_4,e_5,e_6\}$, $\{e_1,e_2,e_3\}$, et $\{e_3,e_4,e_5,e_7\}$. L'arc e_2 quand à lui forme une boucle. Les degrés des noeuds $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ sont respectivement de $\{4,4,5,1\}$. L'ordre n de ce graphe est de 4. Il s'agit enfin d'un 3-graphe caractérisé par les arcs $\{e_4,e_5,e_6\}$ incidents aux noeuds $\{v_2,v_3\}$. La figure (b) suivante présente une spécialisation de graphe dit graphe orienté. La définition (6) distingue les notions de graphe orienté et non orienté. Les définitions (7), (8), (9) complètent les précédentes en ce qui concerne les graphes orientés.



Exemple de graphe (a) non orienté (b) orienté

Définition 6 Orienté et non orienté : Un graphe est dit orienté si E représentent des couples ordonnés de noeuds (origine, extrémité). non orienté dans le cas contraire.

Définition 7 Sortant et entrant : Un arc³ $u = (x,y)$ d'un graphe orienté est dit sortant de x , x est l'extrémité initiale de l'arc. entrant dans y , y est l'extrémité terminale de l'arc.

Définition 8 Successeur et prédécesseur : Pour $u = (x,y)$ d'un graphe orienté y est le successeur de x . x est le prédécesseur de y .

Définition 9 Demi degré : On appelle pour un noeud⁴ x d'un graphe orienté demi degré intérieur $d_i(x)$ le nombre d'arcs ayant x pour extrémité terminale. demi degré extérieur $d_e(x)$ le nombre d'arcs ayant x pour extrémité initiale.
 $d(x) = d_i(x) + d_e(x)$

³On nomme usuellement les arcs arrêtes pour les graphes orientés.

⁴On nomme usuellement les noeuds sommets pour les graphes orientés.

Basé sur ces définitions préliminaires il est possible de distinguer un certains nombre de graphes particuliers. Nous les présentons⁵ dans les définitions (10) à (17). Nous illustrons respectivement ces définitions sur les deux figures suivantes.

Définition 10 Sous-graphe : Dans un sous-graphe $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$

V' est un sous-ensemble de V

E' est un sous-ensemble de E , l'ensemble des couples de noeuds de E' appartient à V' .

Définition 11 Graphe complet :

Graphe dont les noeuds sont reliés deux à deux par des arcs, $m = n(n - 1)/2$.

Une clique est un sous-graphe complet.

Définition 12 Graphe connexe :

Un chemin $c = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ est une séquence d'arcs adjacents deux à deux.

Un chemin c est simple si chaque arc est empruntée une seule fois.

Un graphe est connexe si il existe une chemin entre tout couple de noeud.

Une composante connexe est un sous-graphe connexe.

Définition 13 Graphe planaire :

Graphe dont le tracé dans un plan est sans croisements des arcs.

Définition 14 Graphe simple :

Un graphe simple est un 1-graphe non orienté sans boucle.

Définition 15 Arbre et arborescence :

Un cycle (ou chaîne) est un chemin fermé.

Un arbre est graphe simple connexe sans cycle.

Une arborescence est un arbre orienté.

Définition 16 Arborescence et noeud : Pour une arborescence Γ

La racine est le noeud de base de Γ .

Soit les arcs (x, y) et (x, z) , x est père de $\{y, z\}$, $\{y, z\}$ sont fils de x , $\{y, z\}$ sont frères.

Une feuille est un noeud sans fils.

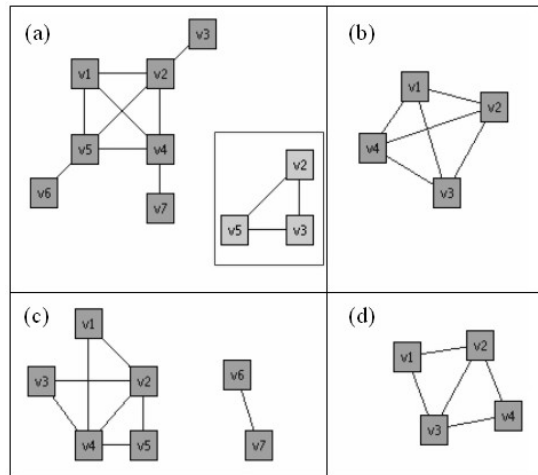
Un noeud interne a au moins un fils.

Définition 17 Arborescence et niveau : Pour une arborescence Γ

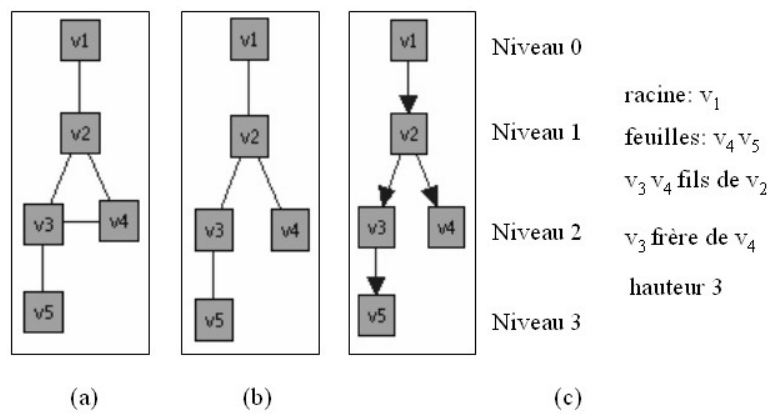
Le niveau d'un noeud est la longueur de son chemin à la racine.

Le hauteur de Γ est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille.

⁵Cette liste est non exhaustive.



(a) sous-graphe (b) complet (c) non connexe (d) planaire⁶



(a) graphe simple (b) arbre (c) arborescence⁶

⁶La numérotation des arcs des graphes n'est pas indiquée pour plus de lisibilité.

Bibliographie

- [Diestel 00] R. Diestel. Graph theory. Hardcover, 2 edition, ISBN : 0-387-98976-5, 2000.
- [Gondran 95] M. Gondran & M. Minoux. Graphes et algorithmes. Editions Eyrolles, 3 edition, ISBN : 0399-4198, 1995.
- [Gross 03] J.L. Gross & J. Yellen. Handbook of graph theory. CRC Press, ISBN : 1584880902, 2003.
- [Lacomme 03] P. Lacomme. Algorithmes de graphes. Editions Eyrolles, 2 edition, ISBN : 2-212-11385-4, 2003.

Table des figures

Graphes orienté/non orienté	1
Quelques graphes particuliers (1)	3
Quelques graphes particuliers (2)	3

Table des matières

Annexe A : Les graphes	0
Bibliographie	4
Table des figures	5